XXVI

Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2017

Оглавление

Приводимые задания предлагались в трех возрастных категориях (9, 10, 11 классы) по два равноценных по сложности варианта в 9 и 10 классах и по два равноценных по сложности варианта в каждом из трех регионов (ЗАПАД, СИБИРЬ, ВОСТОК) для участников 11 класса. Тематика отдельных задач в разных классах пересекается, при этом младшим классам предлагались более легкие варианты заданий.

9 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Про составленный из цифр 9-значный пароль $\left(a_1, a_2, \ldots, a_9\right)$ известно следующее: 1) сумма первых 5 цифр $a_1 + \ldots + a_5$ делится на 5, 2) сумма всех цифр пароля $a_1 + \ldots + a_9$ делится на 10. Сколько таких паролей?

2. Найдите натуральное число x, не превосходящее 77, если известно, что остатки от деления числа x^2 на 77 и 96 равны соответственно 71 и 73.

3. Шляпник решил отправить по почте Зайцу свой пароль от компьютера (слово из 7-ми букв). Перед отправкой он его зашифровал следующим образом. Каждую букву слова он заменил пятизначной комбинацией в соответствии с таблицей из задачи 6 (считается, что Е=Ё). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. В результате у него получилась последовательность $a_1, \ldots, a_{35}$, где $a_i \in \{0;1\}$. Затем Шляпник построил еще одну последовательность $y_1, \ldots, y_{35}$, также состоящую из 0 и 1. Он наугад записал первые четыре члена последовательности y_1, y_2, y_3, y_4 и выбрал четыре неотрицательных целых числа c_1, c_2, c_3, c_4. Оставшиеся члены последовательности $y_5, \ldots, y_{35}$ он подсчитал по формуле $y_{n+4} = r_2\left(c_1 y_n + c_2 y_{n+1} + c_3 y_{n+2} + c_4 y_{n+3}\right)$, где $r_2(b)$ – остаток от деления числа b на 2. Затем он вычислил $b_i = r_2\left(a_i + c_i\right)$, $i = 1, \ldots, 35$. Получившуюся последовательность $b_1, \ldots, b_{35}$ Шляпник разбил на фрагменты длиной 5, каждый из которых он преобразовал в буквы согласно таблице. Заяц получил строку **ГОШРОХБ**. Помогите ему определить пароль.

логин: Шляпник
пароль: РЕ*****

4. Даны множества:

$$X_1 = \{1,2,3,4,5,6,7\},\ X_2 = \{2,5\},\ X_3 = \{2,3\},\ X_4 = \{1,2,3,4,5,7,8,9\},\ X_5 = \{3,5\},$$

$$X_6 = \{1,3,5,6,7\},\ X_7 = \{2,3,5,7,8,9\},\ X_8 = \{5,7,8\},\ X_9 = \{2,3,7,9\}.$$

Сколько существует наборов *различных* цифр $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ таких, что $a_i \in X_i$? Предъявите все эти наборы.

5. Злоумышленник хочет получить доступ к банковской ячейке, защищенной кодовым замком. Комбинация из трех цифр (u,v,w), отпирающая замок, ему не известна. Злоумышленнику удалось изготовить проксимити-карты со следующей информацией: на первой карте записаны цифры (1,5,8), на второй – (7,4,9), на третьей – (9,7,6), на четвертой – (3,2,4). При прикладывании карты с информацией (a,b,c) к считывающему устройству банковской ячейки, ее кодовый замок из состояния (i,j,k) переходит в состояние (i+a,j+b,k+c). (Если какая-либо сумма превосходит 9, то она заменяется ее остатком от деления на 10.) Как только замок оказывается в состоянии (u,v,w), он немедленно открывается. Какое наименьшее количество из имеющихся карт следует использовать, чтобы гарантированно открыть ячейку, независимо от установленной отпирающей комбинации (u,v,w) и начального состояния замка?

6. Агенту передаются сообщения с помощью специальных «передающих» часов, установленных на главной площади города. В заранее условленное время агент приходит к часам и начинает следить за их секундной стрелкой. Если прошла секунда, а стрелка не сдвинулась, значит передан 0, в противном случае (прошла секунда и стрелка сдвинулась) передана 1. Каждая буква сообщения закодирована пятизначной комбинацией из 0 и 1 в соответствии с таблицей (считается, что Е=Ё). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. При приёме сообщения случайный прохожий ненадолго отвлёк агента. Помогите ему восстановить сообщение, если известно, что за время сеанса связи часы отстали на 81 секунду, а в блокноте у агента записаны следующие знаки:

0111110000010001010101110001000100010010001010011100000000101001010000000000000010000101110000
01000100000

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Чтобы удовлетворить условию (1), первые четыре цифры можно выбрать произвольным образом, тогда пятая может быть найдена двумя способами. Следовательно, имеется $2\cdot 10^4$ способов выбрать первые пять цифр. Следующие три цифры (a_6, a_7, a_8) выбираем произвольно, а выполнение условия (2) обеспечивается единственно возможным выбором цифры a_9. Таким образом, количество наборов из 9-ти цифр, удовлетворяющих условиям (1) и (2), равно $2\cdot 10^4\cdot 10^3 = 2\cdot 10^7$.

Ответ: $2\cdot 10^7$.

Задача 2

По условию

$$x^2 = 77n + 71,\quad x^2 = 96m + 73,\ m, n \in N. \qquad (1)$$

Приравняв правые части, найдем

$$77n - 96m = 2 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{96m+2}{77} = m + \frac{19m+2}{77}.$$

Чтобы числитель последней дроби делился на 77, положим $m = 77t + m_0, t \in \mathrm{Z}$. Перебором или с помощью алгоритма Евклида легко найти, что $m_0 = 8$. Итак, $m = 77t + 8$. Подставим это выражение во второе уравнение (1):

$$x^2 = 96\cdot 77t + 841.$$

Поскольку $x^2 \le 77^2$, заключаем, что $t = 0$.

Ответ: 29.

Задача 3

Поскольку

$$r_2(a\cdot b) = r_2\big(r_2(a)\cdot r_2(b)\big), r_2(a+b) = r_2\big(r_2(a) + r_2(b)\big),$$

можно далее считать, что числа $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \{0,1\}$.

Представим первые две буквы полученной строки в виде последовательности $b_1, \dots, b_{10}$: 0001101110.Тогда, предположив, что первые буквы пароля это «РЕ», получим, что $a_1, \dots, a_{10}$: 1000000101, и можно вычислить $y_1, \dots, y_{10}$:

$$b_i = r_2(y_i + a_i) \Leftrightarrow y_i = r_2(b_i + a_i).$$

Получим 1001101011. Используя рекуррентную формулу для членов последовательности $y_5, \dots, y_{10}$, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} y_5 = r_2(c_0y_1 + c_1y_2 + c_2y_3 + c_3y_4) \\ y_6 = r_2(c_0y_2 + c_1y_3 + c_2y_4 + c_3y_5) \\ y_7 = r_2(c_0y_3 + c_1y_4 + c_2y_5 + c_3y_6) \\ y_8 = r_2(c_0y_4 + c_1y_5 + c_2y_6 + c_3y_7) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_2(c_0 + c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_2) \\ 0 = r_2(c_0 + c_1 + c_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_2(c_0 + c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 0 = r_2(c_0 + c_1 + c_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_2(c_0 + c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = r_2(c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = r_2(c_3) \\ 0 = r_2(c_2) \\ 1 = r_2(c_1) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases}$$

В силу отмеченного ранее можно считать, что $c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$. Тогда закон рекурсии для последовательности $y_1, \dots, y_{35}$ имеет вид:

$$y_{n+4} = r_2(y_n + y_{n+1}).$$

Теперь, используя фрагмент последовательности $y_1, \dots, y_{10}$ можно вычислить и всю оставшуюся последовательность $y_{11}, \dots, y_{35}$: 1100010011010111100010011. Для нахождения пароля остается преобразовать буквы полученной строки в последовательность из 0 и 1, а затем воспользоваться формулой:

$$\mathrm{a_i} = \mathrm{r_2}(\mathrm{y_i} + \mathrm{b_i}).$$

Получим строку $a_{11}, \dots, a_{35}$: 00000 00011 00101 01101 10010, преобразовывая которую согласно таблице, придем к последовательности букв АГЕНТ. В итоге искомым паролем является слово РЕАГЕНТ.

Ответ: РЕАГЕНТ.

Задача 4

Комментарий

Пусть задано семейство подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, тогда упорядоченный набор $(a_1, \dots, a_n)$, в котором все элементы различны и $a_i \in X_i, i = 1, \dots, n$, называется *трансверсалью* или *системой различных представителей* данного семейства множеств. Как видно из условия, в данной задаче требуется найти все трансверсали семейства множеств $X_1, \dots, X_9$.

Понятие трансверсали семейства множеств связано с понятием *матрицы инцидентности семейства множеств*. Пусть задано семейство подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, тогда матрицей инцидентности данного семейства называется таблица, имеющая n строк и m столбцов, состоящая из нулей и единиц вида:

	x_1	…	x_j	…	x_m
X_1	b_{11}	…	b_{1j}	…	b_{1m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X_i	b_{i1}	…	b_{ij}	…	b_{im}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X_n	b_{n1}	…	b_{nj}	…	b_{nm}

где $b_{ij} = 1$ только если $x_j \in X_i$ и $b_{ij} = 0$ – в противном случае. Упорядоченный набор элементов $\left(b_{1j_1}, \dots, b_{nj_n}\right)$, равных 1, в котором элементы лежат в разных столбцах, называется *трансверсалью матрицы инцидентности*. Нетрудно понять, что число трансверсалей семейства множеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ равно числу трансверсалей матрицы инцидентности данного семейства.

Решение

Запишем матрицу инцидентности

$$B = \left(b_{ij}\right),\ i = 1, \dots, 9;\ j = 1, \dots, 9$$

семейства множеств $X_1, X_2, \dots, X_9$.

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\\0&0&1&0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&0&1&1&0\\0&1&1&0&0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

В этой матрице необходимо найти все наборы (трансверсали) вида $b_{1j_1},\ldots,b_{9j_9}$, где $j_1,\ldots,j_9$ – некоторая перестановка цифр 1,2,…,9, и все $b_{ij_k}=1,\ i=1,\ldots,9;\ k=1,\ldots,9$. Иными словами, ищутся такие наборы из 9 единиц, что все единицы одного набора лежат в разных строках и разных столбцах. Для облегчения поиска переставим в матрице B строки и столбцы по следующему правилу: строки с меньшим количеством единиц ставим выше, а столбцы с большим количеством единиц – левее. Таким образом переставленная матрица приведена на рис. 1.

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0&1&1&0\\1&1&1&0&0&0&1&1&1\\1&0&1&0&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&1&1&0&0\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

Рис. 1

Поскольку единицы надо выбирать из разных строк и столбцов, сначала следует выбирать 1 из отмеченной пунктиром матрицы 3 на 3 – в ней две трансверсали. Затем выбираются трансверсали в двух отмеченных прямоугольником матрицах 3 на 3 – в каждой из них по 3 трансверсали. Значит, всего 18 трансверсалей.

Ответ: 18 наборов: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 8, 7), (1, 5, 2, 4, 3, 6, 7, 8, 9), (1, 5, 2, 4, 3, 6, 8, 7, 9), (1, 5, 2, 4, 3, 6, 9, 8, 7), (4, 2, 3, 1, 5, 6, 7, 8, 9), (4, 2, 3, 1, 5, 6, 8, 7, 9), (4, 2, 3, 1, 5, 6, 9, 8, 7), (4, 5, 2, 1, 3, 6, 7, 8, 9), (4, 5, 2, 1, 3, 6, 8, 7, 9), (4, 5, 2, 1, 3, 6, 9, 8, 7), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 7, 8, 9), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 8, 7, 9), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 9, 8, 7), (6, 5, 2, 4, 3, 1, 7, 8, 9), (6, 5, 2, 4, 3, 1, 8, 7, 9), (6, 5, 2, 4, 3, 1, 9, 8, 7).

Задача 5

Пусть (a_0,b_0,c_0) – начальное (и неизвестное) состояние замка. Чтобы гарантированно открыть замок, необходимо суметь добавить к начальному состоянию каждую из тысячи комбинаций: (0,0,0), (0,0,1), (0,0,2),…, (9,9,9). Действовать будем так. Пусть необходимо к состоянию замка добавить, например, комбинацию (2,0,6). Для этого приложим карту I два раза, и замок перейдет в состояние (a_0+2,b_0,c_0+6). Если замок не открылся, то приложим карту I еще 8 раз, и замок вернется в начальное состояние (a_0,b_0,c_0). Подобным же образом (возвращаясь каждый раз в начальное состояние) необходимо найти способ добавить и все остальные комбинации.

Отметим следующее:

- одну и ту же карту не имеет смысла прикладывать более 9 раз;
- от порядка прикладывания карт ничего не зависит;
- без карты II обойтись не удастся, поскольку у остальных карт последняя цифра четная;
- двух карт для открытия замка ячейки не хватит: прикладывая каждую из двух карт от 0 до 9 раз, можно добавить к начальному состоянию не более 100 различных комбинаций.

Выясним, можно ли открыть замок наборами карт (I,II,III), (I,II,IV) и (IV,II,III).

Набор (I,II,III). Первую карту приложим A_1 раз, вторую – A_2 раза, третью – A_3 раза. Здесь $A_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$, $i=1,\dots,3$ Надо проверить, разрешима ли относительно A_1, A_2, A_3 система (везде далее равными считаем числа, имеющие одинаковые остатки от деления на 10):

$$\begin{cases} A_1\cdot 1 + A_2\cdot 7 + A_3\cdot 9 = d_1, \\ A_1\cdot 5 + A_2\cdot 4 + A_3\cdot 7 = d_2, \\ A_1\cdot 8 + A_2\cdot 9 + A_3\cdot 6 = d_3, \end{cases}$$

где d_1, d_2, d_3 – произвольный набор цифр. Таких наборов 1000 штук. Значит и левая часть тоже должна принимать 1000 значений. Поскольку каждое A_i принимает всего 10 значений, число значений левой части не превосходит 1000. Чтоб их было 1000 ровно, необходимо и достаточно, чтоб для различных наборов цифр A_1, A_2, A_3 получались различные левые части. Это, в свою очередь, эквивалентно следующему условию

$$\begin{cases} A_1\cdot 1 + A_2\cdot 7 + A_3\cdot 9 = 0, \\ A_1\cdot 5 + A_2\cdot 4 + A_3\cdot 7 = 0, \\ A_1\cdot 8 + A_2\cdot 9 + A_3\cdot 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \ A_i = 0,\ i=1,2,3.$$

Но это не так. Так, например, взяв $A_1 = 7, A_2 = 2, A_3 = 1$, также получаем нулевой столбец. Значит карты (I,II,III) не годятся.

Наборы (I,II,IV) и **(IV,II,III)**. Непосредственной проверкой убеждаемся, что равенства

$$\begin{cases} A_1\cdot 1 + A_2\cdot 7 + A_3\cdot 3 = 0, \\ A_1\cdot 5 + A_2\cdot 4 + A_3\cdot 2 = 0, \\ A_1\cdot 8 + A_2\cdot 9 + A_3\cdot 4 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} A_1\cdot 9 + A_2\cdot 7 + A_3\cdot 3 = 0, \\ A_1\cdot 7 + A_2\cdot 4 + A_3\cdot 2 = 0, \\ A_1\cdot 6 + A_2\cdot 9 + A_3\cdot 4 = 0 \end{cases}$$

верны, только когда все A_i равны нулю. Значит эти наборы карт подойдут.

Ответ: (I,II,IV) и (IV,II,III).

Задача 6

Попробуем прочитать полученное сообщение. Для этого разобьём его на группы по пять знаков и произведём обратную замену в соответствии с таблицей:

01111	10000	01000	10101	01110	00100	01000	10010	00101	00111
П	Р	И	Х	О	Д	И	Т	Е	З
00000	00010	10010	10000	00000	00010	00010	11100	00010	00100
А	В	Т	Р	А	В	В	Ь	В	Д 000

Видимо начало нечитаемого текста, ВЬВД000, приходится на тот момент, когда отвлекли агента. Попробуем выписать буквы сообщения, формируя их с конца, чтобы определить место разрыва:

…01ШАФФААРЧАСА

Совмещая полученную информацию, получим такое сообщение:

П Р И Х О Д И Т Е З А В Т Р А В 000 Ч А С А

Теперь необходимо понять, сколько и какие знаки пропущены. Для этого используем информацию об отставании часов. Фраза «часы отстали на 81 секунду» говорит о том, что в сообщение встречается 81 нулей. Агент записал 71 нулей. Значит, среди пропущенных знаков встречается 10 нулей. Посмотрев на слова ЧАСА нетрудно сделать предположение, что пропущенный отрезок может содержать только сочетающиеся с ним числительные: два, три, четыре, двадцать два, двадцать три, двадцать четыре.

Посмотрим, как выглядят короткие слова числительных в закодированном виде (в длинных будет слишком много нулей):

Число	Кодированный вид	Кол-во нулей
ДВА	00100 00010 00000	13
ТРИ	10010 10000 01000	11
ЧЕТЫРЕ	10111 00101 10010 11011 10000 00101	15

С 10-ю нулями слова нет, но три нуля итак остались в раскодированном тексте, значит искомое слово ДВА.

Ответ: ПРИХОДИТЕ ЗАВТРА В ДВА ЧАСА.

10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Про составленный из цифр 10-значный пароль $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ известно следующее: 1) сумма первых 5 цифр $a_1 + \ldots + a_5$ делится на 5, 2) сумма всех цифр пароля $a_1 + \ldots + a_{10}$ делится на 10. Сколько таких паролей?
2. Найдите натуральное число x, не превосходящее 85 такое, что при делении чисел x^{15} и x^{23} на 85 в остатке получится соответственно 23 и 28.
3. Шляпник решил отправить по почте Зайцу свой пароль от компьютера (слово из 7-ми букв). Перед отправкой он его зашифровал следующим образом. Каждую букву слова он заменил пятизначной комбинацией в соответствии с таблицей из задачи 6 (считается, что Е=Ё). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. В результате у него получилась последовательность $a_1, \ldots, a_{35}$, где $a_i \in \{0;1\}$. Затем Шляпник построил еще одну последовательность $y_1, \ldots, y_{35}$, также состоящую из 0 и 1. Он наугад записал первые четыре члена последовательности y_1, y_2, y_3, y_4 и выбрал четыре неотрицательных целых числа c_1, c_2, c_3, c_4. Оставшиеся члены последовательности $y_5, \ldots, y_{35}$ он подсчитал по формуле $y_{n+4} = r_2(c_1 y_n + c_2 y_{n+1} + c_3 y_{n+2} + c_4 y_{n+3})$, где $r_2(b)$ – остаток от деления числа b на 2. Затем он вычислил $b_i = r_2(a_i + c_i)$, $i = 1, \ldots, 35$. Получившуюся последовательность $b_1, \ldots, b_{35}$ Шляпник разбил на фрагменты длиной 5, каждый из которых он преобразовал в буквы согласно таблице. Заяц получил строку **ГОШРОХБ**. Помогите ему определить пароль.

   логин: Шляпник
   пароль: РЕ*****

4. Даны множества:
   $X_1 = \{1, 6, 9\}$, $X_2 = \{2, 7\}$, $X_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$, $X_4 = \{2, 3, 4, 6, 9\}$, $X_5 = \{1, 2, 3, , 5, 6, 7, 8, 9\}$,
   $X_6 = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}$, $X_7 = \{7, 9\}$, $X_8 = \{2, 6, 7, 8\}$, $X_9 = \{2, 9\}$.

   Сколько существует наборов *различных* цифр $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9)$ таких, что $a_i \in X_i$?
   Предъявите все эти наборы.
5. Злоумышленник хочет получить доступ к банковской ячейке, защищенной кодовым замком. Комбинация из трех цифр (u,v,w), отпирающая замок, ему не известна. Злоумышленнику удалось изготовить проксимити-карты со следующей информацией: на первой карте записаны цифры (7,5,6), на второй – (9,8,3), на третьей – (3,9,2), на четвертой – (1,4,8). При прикладывании карты с информацией (a,b,c) к считывающему устройству банковской ячейки, ее кодовый замок из состояния (i,j,k) переходит в состояние (i+a,j+b,k+c). (Если какая-либо сумма превосходит 9, то она заменяется ее остатком от деления на 10.) Как только замок оказывается в состоянии (u,v,w), он немедленно открывается. Какое наименьшее количество из имеющихся карт следует использовать, чтобы гарантированно открыть ячейку, независимо от установленной отпирающей комбинации (u,v,w) и начального состояния замка?
6. Агенту передаются сообщения с помощью специальных «передающих» часов, установленных на главной площади города. В заранее условленное время агент приходит к часам и начинает следить за их секундной стрелкой. Если прошла секунда, а стрелка не сдвинулась, значит передан 0, в противном случае (прошла секунда и стрелка сдвинулась) передана 1. Каждая буква сообщения закодирована пятизначной комбинацией из 0 и 1 в соответствии с таблицей (считается, что Е=Ё). Данные из таблицы считываются сверху вниз. Так, например, буква Б заменяется на 00001. При приёме сообщения случайный прохожий ненадолго отвлёк агента. Помогите ему восстановить сообщение, если известно, что за время сеанса связи часы отстали на 85 секунд, а в блокноте у агента записаны следующие знаки:
   0100000100010001001000101000100010001110011000110101110011000010110000011000111101110011010

1110000010011100100110011010110100010110000101

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Чтобы удовлетворить условию (1), первые четыре цифры можно выбрать произвольным образом, тогда пятая может быть найдена двумя способами. Следовательно, первые пять цифр можно выбрать $2\cdot 10^4$ способами. Следующие четыре цифры $(a_6,\ldots,a_9)$ выбираем произвольно, а выполнение условия (2) обеспечивается единственно возможным выбором цифры a_{10}. Таким образом, количество наборов из 10-и цифр, удовлетворяющих условиям (1) и (2), равно $2\cdot 10^4\cdot 10^4 = 2\cdot 10^8$.

Ответ: $2\cdot 10^8$.

Задача 2

Заметим, что $\left(x^{23}\right)^2 = x\cdot\left(x^{15}\right)^3$. Следовательно, $28^2 \equiv x\cdot 23^3 \pmod{85}$. Поскольку $28^2 \equiv 19 \pmod{85}$ и $23^3 \equiv 12 \pmod{85}$, получаем, что $19 \equiv x\cdot 12 \pmod{85} \Leftrightarrow 12x = 85k + 19,\ k\in Z$. Отсюда $x = 7k + 1 + \dfrac{k+7}{12}$. Чтобы число $k+7$ делилось нацело на 12, необходимо и достаточно, чтобы число k давало остаток 5 при делении на 12, т.е. $k = 12m + 5,\ m\in Z$. Следовательно, $x = 85m + 37$. По условию $0 < x \le 85$, поэтому $x = 37$.

Ответ: 37.

Задача 3

Поскольку

$$r_2(a\cdot b) = r_2\big(r_2(a)\cdot r_2(b)\big), r_2(a+b) = r_2\big(r_2(a) + r_2(b)\big),$$

можно далее считать, что числа $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \{0,1\}$.

Представим первые две буквы полученной строки в виде последовательности $b_1,\ldots,b_{10}$: 0001101110.Тогда, предположив, что первые буквы пароля это «РЕ», получим, что $a_1,\ldots,a_{10}$: 1000000101, и можно вычислить $y_1,\ldots,y_{10}$:

$$b_i = r_2(y_i + a_i) \Leftrightarrow y_i = r_2(b_i + a_i).$$

Получим 1001101011. Используя рекуррентную формулу для членов последовательности $y_5,\ldots,y_{10}$, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} y_5 = r_2(c_0y_1 + c_1y_2 + c_2y_3 + c_3y_4) \\ y_6 = r_2(c_0y_2 + c_1y_3 + c_2y_4 + c_3y_5) \\ y_7 = r_2(c_0y_3 + c_1y_4 + c_2y_5 + c_3y_6) \\ y_8 = r_2(c_0y_4 + c_1y_5 + c_2y_6 + c_3y_7) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_2(c_0 + c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_2) \\ 0 = r_2(c_0 + c_1 + c_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_2(c_0 + c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 0 = r_2(c_0 + c_1 + c_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = r_2(c_0 + c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = r_2(c_3) \\ 0 = r_2(c_2 + c_3) \\ 1 = r_2(c_1 + c_3) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = r_2(c_3) \\ 0 = r_2(c_2) \\ 1 = r_2(c_1) \\ 1 = r_2(c_0) \end{cases}$$

В силу отмеченного ранее можно считать, что $c_0 = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0$. Тогда закон рекурсии для последовательности $y_1, \dots, y_{35}$ имеет вид:

$$y_{n+4} = r_2(y_n + y_{n+1}).$$

Теперь, используя фрагмент последовательности $y_1, \dots, y_{10}$ можно вычислить и всю оставшуюся последовательность $y_{11}, \dots, y_{35}$: 1100010011010111100010011. Для нахождения пароля остается преобразовать буквы полученной строки в последовательность из 0 и 1, а затем воспользоваться формулой:

$$\mathrm{a_i} = \mathrm{r_2}(\mathrm{y_i} + \mathrm{b_i}).$$

Получим строку $\mathrm{a}_{11}, \dots, a_{35}$: 00000 00011 00101 01101 10010, преобразовывая которую согласно таблице, придем к последовательности букв АГЕНТ. В итоге искомым паролем является слово РЕАГЕНТ.

Ответ: РЕАГЕНТ.

Задача 4

Комментарий

Пусть задано семейство подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, тогда упорядоченный набор $(a_1, \dots, a_n)$, в котором все элементы различны и $a_i \in X_i, i = 1, \dots, n$, называется *трансверсалью* или *системой различных представителей* данного семейства множеств. Как видно из условия, в данной задаче требуется найти все трансверсали семейства множеств $X_1, \dots, X_9$.

Понятие трансверсали семейства множеств связано с понятием *матрицы инцидентности семейства множеств.* Пусть задано семейство подмножеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ множества $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, тогда матрицей инцидентности данного семейства называется таблица, имеющая n строк и m столбцов, состоящая из нулей и единиц вида:

	x_1	…	x_j	…	x_m
X_1	b_{11}	…	b_{1j}	…	b_{1m}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X_i	b_{i1}	…	b_{ij}	…	b_{im}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X_n	b_{n1}	…	b_{nj}	…	b_{nm}

где $b_{ij} = 1$ только если $x_j \in X_i$ и $b_{ij} = 0$ – в противном случае. Упорядоченный набор элементов $(b_{1j_1}, \dots, b_{nj_n})$, равных 1, в котором элементы лежат в разных столбцах, называется *трансверсалью матрицы инцидентности*. Нетрудно понять, что число трансверсалей семейства множеств $X_1, X_2, \dots, X_n$ равно числу трансверсалей матрицы инцидентности данного семейства.

Решение

Запишем матрицу инцидентности $B = (b_{ij}),\ i = 1, \dots, 9;\ j = 1, \dots, 9$ всех цифр множеств X_i: То есть, $b_{ij} = 1,$ если $j \in X_i$, и $b_{ij} = 0$ в противном случае. В этой матрице нам необходимо найти все наборы (*трансверсали*) вида $b_{1j_1}, \dots, b_{9j_9}$, где $j_1, \dots, j_9$ – некоторая перестановка цифр 1,2,…,9, и все $b_{ij_k} = 1,\ i = 1, \dots, 9;\ k = 1, \dots, 9$. Иными словами мы ищем такие наборы из 9 единиц, что все единицы одного набора лежат в разных строках и разных столбцах.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для облегчения поиска переставим в матрице B строки и столбцы (в целом, строки с меньшим количеством 1 ставим выше, а столбцы с большим количеством 1 – левее). Результат приведен на рис. 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 2

Поскольку единицы надо выбирать из разных строк и столбцов, сначала следует выбирать 1 из отмеченной пунктиром матрицы 3 на 3. В ней две трансверсали. Затем выбираем трансверсали в двух отмеченных прямоугольником матрицах 3 на 3. В каждой из них по 3 трансверсали. Значит, всего 18 трансверсалей.

Ответ: 18 наборов.

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 8, 7, 6, 9), (1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 4, 3, 5, 8, 7, 6, 9), (1, 2, 5, 4, 3, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 5, 4, 3, 8, 7, 6, 9), (1, 7, 3, 4, 5, 6, 9, 8, 2), (1, 7, 3, 4, 5, 8, 9, 6, 2), (1, 7, 4, 3, 5, 6, 9, 8, 2), (1, 7, 4, 3, 5, 8, 9, 6, 2), (1, 7, 5, 4, 3, 6, 9, 8, 2), (1, 7, 5, 4, 3, 8, 9, 6, 2), (6, 2, 3, 4, 5, 1, 7, 8, 9), (6, 2, 4, 3, 5, 1, 7, 8, 9), (6, 2, 5, 4, 3, 1, 7, 8, 9), (6, 7, 3, 4, 5, 1, 9, 8, 2), (6, 7, 4, 3, 5, 1, 9, 8, 2), (6, 7, 5, 4, 3, 1, 9, 8, 2).

Задача 5

Пусть (a_0,b_0,c_0) – начальное (и нам неизвестное) состояние замка. Чтобы гарантированно открыть замок, мы должны суметь добавить к начальному состоянию каждую из тысячи комбинаций: (0,0,0), (0,0,1), (0,0,2),…, (9,9,9). Действовать будем так. Хотим к состоянию замка добавить, например, комбинацию (4,0,2). Для этого приложим карту I два раза, и замок перейдет в состояние (a_0+4,b_0,c_0+2). Если замок не открылся, то приложим карту I еще 8 раз, и замок вернется в начальное состояние (a_0,b_0,c_0). Подобным же образом (возвращаясь каждый раз в начальное состояние) мы должны суметь добавить и все остальные комбинации.

Отметим следующее:

- одну и ту же карту не имеет смысла прикладывать более 9 раз. От порядка прикладывания карт ничего не зависит;
- без карты II обойтись не удастся, поскольку у остальных карточек последняя цифра четная;
- двух карт не хватит. Действительно, прикладывая каждую из двух карт от 0 до 9 раз, мы сумеем добавить к начальному состоянию не более 100 различных комбинаций.

Выясним, можно ли открыть замок наборами карт (I,II,III), (I,II,IV) и (VI,II,III).

Набор (I,II,III). Первую карту приложим A_1 раз, вторую – A_2 раза, третью – A_3 раза. Здесь $A_i \in \{0,1,2,...,9\}$. Надо проверить, разрешима ли относительно A_1, A_2, A_3 система (везде далее равными считаем числа, имеющие одинаковые остатки от деления на 10)

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + A_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь d_1, d_2, d_3 – произвольный набор цифр. Таких наборов 1000 штук. Значит и левая часть тоже должна принимать 1000 значений. Поскольку каждое A_i принимает всего 10 значений, число значений левой части не превосходит 1000. Чтоб их было 1000 ровно, необходимо и достаточно, чтоб для различных наборов цифр A_1, A_2, A_3 получались различные левые части. Это, в свою очередь, эквивалентно следующему условию

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + A_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_i = 0, i = 1,2,3.$$

Но это не так. Достаточно взять $A_1 = 7, A_2 = 2, A_3 = 1$. Значит карты (I,II,III) не годятся.

Наборы (I,II,IV) и **(VI,II,III)**. Непосредственной проверкой убеждаемся, что равенства

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + A_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + A_2 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + A_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

верны, только когда все A_i равны нулю. Значит эти наборы карт подойдут.

Ответ: (I,II,IV) и (VI,II,III).

Задача 6

Попробуем прочитать полученное сообщение. Для этого разобьём его на группы по пять знаков и произведём обратную замену в соответствии с таблицей:

010000010001000100100010100010001000111001100011010111001100001011000011000111101110011010111000001001110010011001101011010001011000101

И Д И Т Е В Д О М Н О М Е Р Ш Ю Ь Ъ …

Видимо начала нечитаемого текста приходиться на тот момент, когда отвлекли агента. Попробуем читать буквы сообщения с конца, чтобы определить место разрыва:

010000010001000100100010100010001000111001100011010111001100001011000011000111101110011010111000001001110010011001101011010001011000101

… Ж В Ш М П О Н О В О Й У Л И Ц Е

Совмещая полученную информацию получим такое сообщение:

И Д И Т Е В Д О М Н О М Е Р *1100*П О Н О В О Й У Л И Ц Е

Теперь нам необходимо понять, сколько и какие знаки пропущены. Для этого используем информацию об отставании часов. Фраза «часы отстали на 85 секунд» говорит нам, что в сообщение встречается 85 нулей. Агент записал 76нулей. Значит среди пропущенных знаков встречается 9 нулей. Также мы знаем, что пропущено слово, обозначающее номер дома. Чтобы не перебирать все числительные, посмотрим на кусочек 1100 и слова, которые могут его содержать. Момент, когда отвлекли агента может быть расположен относительно известного отрезка в любой из звездочек: *1*1*0*0* Запишем в таблицу только те буквы, соответствующие знакам, которые могут встречаться в числительном.

Когда отвлекли	Первая возможная буква числительного	Последняя возможная буква числительного
*1100	-	Ь
1*100	С,Т,Ч,Ш	Ь
11*00	Ш	И, Ь
110*0	Ш	И, Ь
1100*	Ш	-

Значит, нам нужно проверить числительные, оканчивающиеся на Ь.

Число	Запись	Кол-во нулей
ПЯТЬ	01111 11111 10010 11100	6
ШЕСТЬ	11000 00101 10001 10010 11100	14
СЕМЬ	10001 00101 01100 11100	11
ВОСЕМЬ	00010 01110 10001 00101 01100 11100	17
ДЕВЯТЬ	00100 00101 00010 11111 10010 11100	16
ДЕСЯТЬ	00100 00101 10001 11111 10010 11100	15
ОДИННАДЦАТЬ	01110 00100 01000 01101 01101 00000 00100 10110 00000 10010 11100	35

Видим, что количеству нулей (девять пропущенных и два записаных) соответствует число СЕМЬ.
Ответ: ИДИТЕ В ДОМ НОМЕР СЕМЬ ПО НОВОЙ УЛИЦЕ

11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Каждая буква алфавита была заменена на другую букву. При этом разные буквы были заменены разными. Расшифруйте фразу, позволяющую запомнить расположение планет солнечной системы (здесь Плутон считается планетой):

ЧАЮША ПСЭЙМЙМЕ ЯК ЧКНО, БПЙЭТНША ОПЙНШЩП Щ ШКИЙУ ЦЭКШЙМС.

2. Даты рождения учеников хранились на сервере школы. Для каждого ученика его дата рождения была представлена числом t, которое вычислялось по формуле $t = 31(m-1)+(d-1)$, где m – номер месяца, d – порядковый день месяца. (Например, если $t = 65$, то $m = 3$ и $d = 4$, то есть этот ученик родился 4-го марта.) Затем было решено сведения о датах рождения зашифровать. Вместо числа t на сервере теперь хранится число x такое, что число a^x при делении на 373 дает остаток t, где a – секретное (но одинаковое для всех учеников) натуральное число. Известно, что Мария родилась 28-го марта, Александр – 31-го января. Известно также, что число a^{372} при делении на 373 дает остаток 1. Найдите дату рождения Павла.

Ученик	x
Мария	31
Александр	12
Павел	189

3. На прямой заданы два отрезка, длины которых равны $2016^{2015}-1$ и $2016^{2018}-1$. Осуществляя построения только на этой прямой (т.е. без использования точек вне прямой), с помощью циркуля постройте отрезок длины 2015.

4. Для зашифрования сообщения на русском языке, знаки препинания в котором опущены, а слова отделены друг от друга знаком пробела (-), используется двухблочный шифратор. Первый блок шифратора заменяет буквы сообщения и пробелы (-) на числа в соответствии с таблицей, построенной на основе ключевого слова. Сначала записывается ключевое слово, потом знак пробела (-), потом остальной алфавит в естественном порядке за исключением букв, входящих в ключевое слово (при этом считается, что Е=Ё). Например, если ключевое слово *привет*, то первый блок будет осуществлять замену в соответствии со следующей таблицей:

П	Р	И	В	Е	Т	-	А	Б	Г	Д	Ж	З	Й	К	Л	М	Н	О	С	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

Второй блок получает на входе числа из первого блока и осуществляет усложнение шифрованного сообщения по следующему правилу. Первое число он оставляет без изменений, а к каждому следующему прибавляет число, равное произведению числа 33 и остатка от деления на три предыдущего числа. Слово *тайное* на предложенном ключе будет зашифровано в сообщение 5 73 46 50 84 4 (см. таблицу). Прочитайте сообщение, зашифрованное этим шифратором на другом ключе, если известно, что в сообщении встречается слово *здесь*:

Текст	Т	А	Й	Н	О	Е
1й блок	5	7	13	17	18	4
Остаток	2	1	1	2	0	1
2й блок	5	73	46	50	84	4

30 5 84 6 16 51 10 42 5 72 19 51 14 66 11 66 5 95 70 65 72 4 38 86 66 17 83 94 49 39 17 84 6 17 84 24 29 97 39 11 74 75 4 62 72 1 37 42 6 14 84 25 47 78 6 4 42 20 94

5. Про составленный из цифр 20-значный пароль $(a_1, a_2, \ldots, a_{20})$ известно следующее: 1) сумма первых 5 цифр $a_1+\ldots+a_5$ делится на 5, 2) сумма первых 10 цифр $a_1+\ldots+a_{10}$ делится на 10 и 3) сумма всех цифр пароля $a_1+\ldots+a_{20}$ делится на 20. Сколько таких паролей?

6. Для безопасной передачи по сети на мобильный телефон секретного ключа (СК), представляющего собой набор из 3-х цифр $p_1p_2p_3$, этот ключ предварительно зашифровывается следующим образом. Формируется четырехзначное число $m = 1p_1p_2p_3$, и вычисляется зашифрованный ключ (ЗК) c по формуле $c = r_n(m^3)$, где $r_n(z)$ – остаток от деления числа z на n. Это значение c и пересылается по сети. При получении числа c на телефоне подсчитывается число $M = r_n(c^d)$. Причем натуральное число d выбрано так, что для любого натурального числа z выполняется равенство $r_n(z^{3d}) = r_n(z)$. Если найденное M не является четырехзначным числом, первая цифра в котором 1, телефон выдаёт сообщение об ошибке. Злоумышленник перехватил ЗК $c = 18299$ и предпринял попытку передачи на телефон новых чисел вида $r_n(s \cdot c)$. При $s = 100^3$ была получена ошибка, а при $s = 89^3$ и $s = 1728$ ошибки не возникло. Определите СК, если $n = 20203$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Порядок следования планет: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон. Поскольку фраза помогает расположение планет запомнить, логично предположить, что первая буква в каждом слове – это первая буква в названии планеты. То есть М заменили на Ч, В на П и т.д. Из соображений читаемости легко восстанавливается ответ.

Ответ: МОЖНО ВЫЛЕТЕТЬ ЗА МАРС, ЮВЕЛИРНО СВЕРНУВ У НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ.

Задача 2

Число t у Марии равно $31 \cdot (4-1) + (28-1) = 89$, а у Александра $31 \cdot (1-1) + (31-1) = 30$. Пусть $n = 373$, тогда по условию $r_n(\alpha^{31}) = 89$, $r_n(\alpha^{12}) = 30$ (где $r_n(a)$ - остаток от деления числа a на n).

Требуется найти остаток от деления α^{189} на 373. Для этого найдем натуральные u и v такие, что $\alpha^{189} = \left(\alpha^{31}\right)^u \left(\alpha^{12}\right)^v$, то есть $31u + 12v = 189$. Тогда

$$v = \frac{189 - 31u}{12} = 15 - 3u + \frac{9 + 5u}{12}.$$

Чтобы числитель последней дроби делился на 12, следует положить $u = 3$, тогда $v = 8$ и (см. приложение):

$r_n(\alpha^{189}) = r_n((\alpha^{31})^3 \cdot (\alpha^{12})^8) = r_n(\alpha^{31})^3 \cdot r_n(\alpha^{12})^8 = r_n(89)^3 \cdot r_n(30)^8 = 282.$

Итак, число t у Павла равно 282, а т.к. $282 = 31 \cdot (10-1) + (4-1)$, то получаем, что Павел родился 4-го октября.

Ответ: 4-ое октября.

Задача 3

Для любых трех натуральных чисел m, n и a справедливо равенство $\left(a^m - 1, a^n - 1\right) = a^{(m,n)} - 1$. Здесь (x, y) – наибольший общий делитель чисел x и y. В условии задачи показатели m и n взаимно просты, поэтому число $a^{(m,n)} - 1$ равняется числу $a - 1$, то есть длине искомого отрезку. Его можно получить по алгоритму Евклида: меньший отрезок откладывают циркулем на большем столько раз, сколько возможно; оставшуюся часть большего отрезка (принимаемую за «остаток от деления») откладывают на меньшем отрезке и т.д.

Покажем как можно решить задачу непосредственно (а по сути, перевывести упомянутое равенство в частном случае). Даны два отрезка $x = a^{2015} - 1$ и $y = a^{2018} - 1$, где $a = 2016$. Будем, пока возможно, откладывать меньший отрезок x на большем y. То есть делим y на x с остатком: $a^{2018} - 1 = a^3\left(a^{2015} - 1\right) + a^3 - 1$. Теперь делим меньший отрезок x на остаток: $a^{2015} - 1 = a^2\left(a^{2013} - 1\right) + a^2 - 1$. Поскольку 2013 делится на 3, число $a^{2013} - 1$ делится нацело на число $a^3 - 1$, при этом $a^2 - 1$ – остаток от деления числа x на $a^3 - 1$. И, наконец, $a^3 - 1 = a\left(a^2 - 1\right) + a - 1$. Тем самым доказано, что наибольшей общей мерой данных в условии отрезков будет отрезок длиной $a - 1$.

Задача 4

Заметим, что “избавиться” от действия второго блока легко: достаточно от чисел зашифрованного сообщения взять остаток от деления на 33:

30 5 18 6 16 18 10 9 5 6 19 18 14 0 11 0 5 29 4 32 6 4 5 20 0 17 17 28 16 6 17 18 6 17 18 24 29 31 6 11 8 9 4 29 6 1 4 9 6 14 18 25 14 12 6 4 9 20 28

По регулярности расположения чисел и исходя из правила построения ключа обозначать знак пробела может только число 6 (которое встречается чаще всего):

30 5 18 - 16 18 10 9 5 - 19 18 14 0 11 0 5 29 4 32 - 4 5 20 0 17 17 28 16 - 17 18 - 17 18 24 29 31 - 11 8 9 4 29 - 1 4 9 - 14 18 25 14 12 - 4 9 20 28

Рассмотрим возможные места расположения слова ЗДЕСЬ, в тексте всего имеется 5 вариантов слов из 5-ти букв:

16 18 10 9 5
4 5 20 0 17
17 18 24 29 31
11 8 9 4 29
14 18 25 14 12

Поскольку разные буквы шифровались разными числами, последний вариант расположения слова ЗДЕСЬ не подходит из-за дважды встречающегося числа 14. Учитывая алгоритм построения ключа, отбросим первый, второй и третий варианты, поскольку шестая буква алфавита Е при найденном расположении пробела не может оказаться на 18, 20 и 24 месте ключа.

Тогда единственным вариантом будет соответствие:

11 8 9 4 29 = ЗДЕСЬ.

Произведем замену:

30 5 18 - 16 18 10 Е 5 - 19 18 14 0 З 0 5 Ь С 32 - С 5 20 0 17 17 28 16 - 17 18 - 17 18 24 Ь 31 - З Д Е С Ь - 1 С Е - 14 18 25 14 12 - С Е 20 28

Далее, поскольку Ь зашифрован числом 29, можно определить, что 30 31 32 = Э Ю Я, получаем:

Э 5 18 - 16 18 10 Е 5 - 19 18 14 0 З 0 5 Ь С Я - С 5 20 0 17 17 28 16 - 17 18 - 17 18 24 Ь Ю - З Д Е С Ь - 1 С Е - 14 18 25 14 12 - С Е 20 28

По слову 1 С Е нетрудно догадаться, что 1 = В, слово Э 5 18 похоже на ЭТО и тогда 17 18 = НО, получаем:

Э Т О - 16 О 10 Е Т - 19 О 14 0 З 0 Т Ь С Я - С Т 20 0 Н 17 28 16 - Н О - Н О 24 Ь Ю - З Д Е С Ь - В С Е - 14 О 25 14 12 - С Е 20 28

Видим, что 24 = Ч, тогда 25 26 27 28 = Ш Щ Ъ Ы и 10 = Ж и располагаем почти читаемым текстом:

Э Т О - 16 О Ж Е Т - 19 О 14 0 З 0 Т Ь С Я - С Т 20 0 Н Н Ы 16 - Н О - Н О Ч Ь Ю - З Д Е С Ь - В С Е - 14 О Ш 14 12 - С Е 20 Ы,

который нетрудно восстановить по смыслу и с учетом правила зашифрования, описанного в задаче.

Ответ: ЭТО МОЖЕТ ПОКАЗАТЬСЯ СТРАННЫМ НО НОЧЬЮ ЗДЕСЬ ВСЕ КОШКИ СЕРЫ.

Задача 5

Чтобы удовлетворить условию (1), первые четыре цифры можно выбрать произвольным образом, тогда пятая может быть найдена двумя способами. Следовательно, первые пять цифр можно выбрать $2\cdot 10^4$ способами. Следующие четыре цифры $(a_6,\ldots,a_9)$ выбираем произвольно, а выполнение условия (2) обеспечивается единственно возможным выбором цифры a_{10}. Таким образом, количество наборов из 10-и цифр, удовлетворяющих условиям (1) и (2), равно $2\cdot 10^4\cdot 10^4 = 2\cdot 10^8$. По аналогии, количество наборов $(a_{11},a_{12},\ldots,a_{20})$, сумма цифр у которых делится на 10, равно 10^9. Далее, пусть $A=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{20})$ – один из таких наборов, т.е. сумма его цифр $M=a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{20}$ делится на 10. Используя цифры набора *A,* построим набор $B=((9-a_{11}),(9-a_{12}),\ldots,(9-a_{20}))$. Сумма его цифр также делится на 10 и равна $90-M$. Но тогда суммы цифр в наборах A и B имеют разные остатки от деления на 20 (у одной из них он 0, у другой – 10). Рассмотрим теперь какой-либо набор $(a_1,\ldots,a_{10})$, удовлетворяющий условиям (1) и (2). Дополним его наборами *A* и *B*. Тогда сумма всех цифр ровно у одного из двух наборов $(a_1,\ldots,a_{10},A)$ и $(a_1,\ldots,a_{10},B)$ будет делиться нацело на 20. Значит, одному набору $(a_1,\ldots,a_{10})$ "подойдет" ровно половина из 10^9 наборов $(a_{11},a_{12},\ldots,a_{20})$. Следовательно, общее количество наборов, удовлетворяющих условиям задачи, равно $2\cdot 10^8\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^9=10^{17}$.

Ответ: 10^{17}.

Задача 6

Если $s=u^3$, то по условию $r_n((s\cdot c)^d)=r_n(u\cdot m)$. При $s=1728=12^3$ ошибки не было, поэтому $r_n(12\cdot m)$ – четырехзначное число, начинающееся с 1, то есть

$$1000\le r_n(12\cdot m)=12\cdot m-t\cdot n<2000,$$
$$\frac{1000+t\cdot n}{12}\le m<\frac{2000+t\cdot n}{12},$$

t – натуральное. С учетом того, что

$$1000\le m<2000 \qquad (1)$$

нетрудно заметить, что $t=1$ и получаем следующее ограничение:

$$1767\le m\le 1850. \qquad (2)$$

При $s=89^3$ ошибки также не было, поэтому

$$1000\le r_n(89\cdot m)=89\cdot m-t'\cdot n<2000,$$
$$\frac{1000+t'\cdot n}{89}\le m<\frac{2000+t'\cdot n}{89}.$$

Нетрудно заметить, что $t'=8$ – в этом можно убедиться непосредственной проверкой, но для сокращения времени на вычисления можно при различных t' получить только соответствующие оценки, противоречащие (1) или (2):

- при $t'=10$ имеем $\frac{1000+10\cdot n}{89}>\frac{10\cdot 20203}{100}>2000$, что противоречит (1);
- при $t'=9$ имеем $\frac{1000+9\cdot n}{89}>\frac{9\cdot 20203}{90}>2000$, что противоречит (1).
- при $t'=7$ имеем $\frac{2000+7\cdot 20203}{89}<\frac{2000+7\cdot 20205}{85}=25+\frac{7}{17}\cdot 4021<1700$, что противоречит (2).

В итоге получаем, что $t'=8$ и

$$1828\le m\le 1838. \qquad (3)$$

Предположим теперь, что и при $s=100^3$ ошибки не было. Тогда

$$a=\frac{1000+t''\cdot n}{100}\le m<\frac{2000+t''\cdot n}{100}=b. \qquad (4)$$

Полуинтервал $[a,b)$ должен иметь непустое пересечение с отрезком, определяемым неравенством (3). Следовательно,

$$\begin{cases}a\le 1838\\ b>1828\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t''\cdot n\le 182800\\ t''\cdot n>180800\end{cases}\Leftrightarrow t''\cdot n=181827.$$

Подставляя найденное значение $t''\cdot n$ в (4), имеем

$$1829\le m\le 1838. \qquad (5)$$

Но на самом деле при $s=100^3$ ошибка была, значит m неравенству (5) не удовлетворяет, но удовлетворяет неравенству (3), следовательно $m=1828$.

Ответ: 1828.

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

9 КЛАСС

1. Абоненты A, B и C используют следующую схему разделения секрета: общий секретный ключ – коэффициенты $(a; b; c), a, b, c \in Z$. Каждый абонент знает координаты ровно одной точки, принадлежащей параболе $y = ax^2 + bx + c$. Абонент A – точку (-5, 12), абонент B – (2, 5). Абоненты A и B вступили в сговор и решили восстановить общий секретный ключ. Причём им известно, что абсцисса вершины параболы – наименьшее по модулю ненулевое целое число при заданных точках абонентов A и B. Найдите секретный ключ. В ответе запишите число, равное $a + b + c$.

2. На кодовом замке имеется круглый диск с нанесенными на равноотстоящих интервалах по его периметру числами от 1 до 12. Изначально диск установлен как на Рис.1. Замок откроется, если диск окажется повернутым на 60^0 относительно своего первоначального положения (Рис. 2). Для изменения положения диска имеется специальный стержень, который можно продеть через два любых диаметрально противоположных числа (например, через 1 и 7 как на Рис.3), а затем повернуть диск вокруг стержня на 180^0 (в результате диск окажется в положении, изображенном на Рис.4). За какое наименьшее число таких поворотов можно открыть замок?

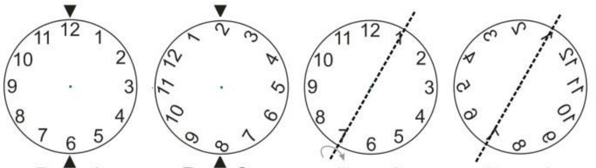
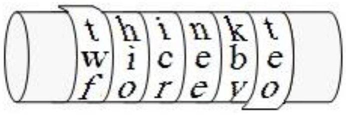
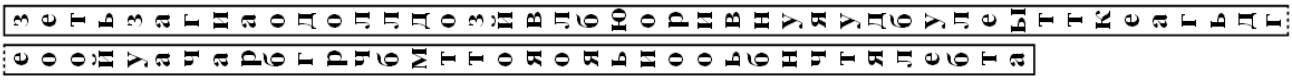


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

3. Для шифрования сообщений Катя и Антон использовали шифр Сцитала: на круглую палочку виток к витку без просветов и нахлёстов наматывалась лента. При горизонтальном положении палочки на ленту по всей длине стержня построчно записывался текст сообщения без знаков препинания и пробелов. После этого лента с записанным на ней текстом посылалась адресату. Антон передал Кате ленту, на которой было написано вот что:





К сожалению, Катя свою палочку потеряла, но она видит, что лента исписана полностью, и знает, что при намотке ленты было сделано целое число оборотов. Помогите ей восстановить сообщение. В ответе укажите первое слово полученного сообщения.

4. Для зашифрования осмысленного русского слова используется последовательность натуральных чисел $y_1, y_2, \ldots,$ которая формируется так: y_1 выбирается произвольно, а остальные члены последовательности вычисляются по формуле $y_{n+1} = 4y_n + 23, n = 1, 2, \ldots$. Зашифрование производилось следующим образом. Первая буква слова заменялась числом согласно таблице и умножалась на y_1. Потом также заменялась вторая буква и умножалась на y_2 и т.д. Затем все произведения были замены остатками от деления на 32. В результате получилось вот что:

8, 16, 24, 13, 22, 10, 9, 16, 0, 28, 24, 29.

Какое слово было зашифровано?

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

5. *Треугольником Паскаля* называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится в строке с номером 100?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
…

10 КЛАСС

1. Абоненты А, В и С используют следующую схему разделения секрета: общий секретный ключ – это квадратичная парабола $y = ax^2 + bx + c;\ a, b, c\ \in Z$, у каждого абонента имеется по одной точке, принадлежащих параболе. У абонента А точка (-5, 12), у абонента В (2, 5). Абоненты А и В вступили в сговор и решили восстановить общий секретный ключ. Причем им известно, что абсцисса вершины параболы – наименьшее по модулю ненулевое целое число при заданных точках абонентов. В ответе запишите число, равное $a + b + c$.

2. На кодовом замке имеется круглый диск с нанесенными на равноотстоящих интервалах по его периметру числами от 1 до 12. Изначально диск установлен как на Рис.1. Замок откроется, если диск окажется повернутым на 60^0 относительно своего первоначального положения (Рис. 2). Для изменения положения диска имеется специальный стержень, который можно продеть через два любых диаметрально противоположных числа (например, через 1 и 7 как на Рис.3), а затем повернуть диск вокруг стержня на 180^0 (в результате диск окажется в положении, изображенном на Рис.4). За какое наименьшее число таких поворотов можно открыть замок?

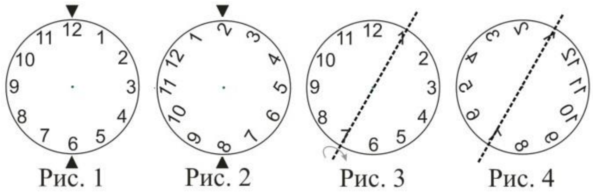
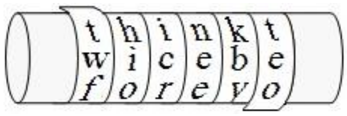
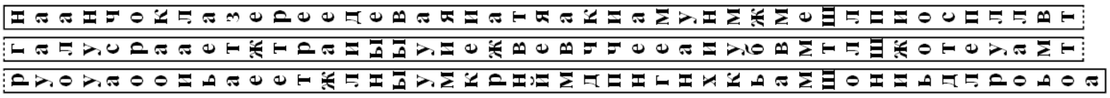


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4

3. Для шифрования сообщений Катя и Антон использовали шифр Сцитала: на круглую палочку виток к витку без просветов и нахлёстав наматывалась лента. При горизонтальном положении палочки на ленту по всей длине стержня построчно записывался текст сообщения без знаков препинания и пробелов. После этого лента с записанным на ней текстом посылалась адресату. Антон передал Кате ленту, на которой было написано вот что:





К сожалению, Катя свою палочку потеряла, но она видит, что лента исписана полностью, и знает, что при намотке ленты было сделано целое число оборотов. Помогите ей восстановить сообщение. В ответе укажите первое слово полученного сообщения.

4. Для проверки корректности номера пластиковой карты, представляющего собой набор из 16 цифр $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16})$, вычисляются контрольные суммы *A*, *B* и *C*:

$$A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16},$$

$$B = x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 7x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{15},\ C = x_1 + x_2 + x_4 + 7x_5 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + x_{14} + x_{16}.$$

Если все три суммы *A*, *B* и *C* делятся нацело на 10, то номер признаётся корректным. Каких корректных номеров больше и насколько: у которых первые 4 цифры 0 0 0 0 или тех, у которых последние 4 цифры 0 0 0 0?

5. Для зашифрования осмысленного русского слова используется последовательность натуральных чисел $y_1, y_2, \ldots,$ которая формируется так: y_1 выбирается произвольно, а остальные члены последовательности вычисляются по формуле $y_{n+1} = 4y_n + 25, n = 1, 2, \ldots$. Зашифрование производилось следующим образом. Первая буква слова заменялась числом согласно таблице и умножалась на y_1. Потом также заменялась вторая буква и умножалась на y_2 и т.д. Затем все произведения были замены остатками от деления на 32. В результате получилось вот что: **12, 22, 16, 1, 3, 15, 0, 26, 0, 9, 8, 1.** Какое слово было зашифровано?

А	Б	В	Г	Д	ЕЁ	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

6. *Треугольником Паскаля* называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится в строке с номером 256?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
…

11 КЛАСС

1. Абоненты A, B и C используют следующую схему разделения секрета: общий секретный ключ – коэффициенты $(a;b;c), a,b,c \in Z$. Каждый абонент знает координаты ровно одной точки, принадлежащей параболе $y = ax^2 + bx + c$.. Абонент A – точку (-5, 20), абонент B – (2, -1). Абоненты A и B вступили в сговор и решили восстановить общий секретный ключ. Причём им известно, что абсцисса вершины параболы – наименьшее по модулю ненулевое целое число при заданных точках абонентов A и B. Найдите секретный ключ. В ответе запишите число, равное $a + b + c$.

2. Пароль от кодового замка – три первых члена положительной геометрической прогрессии, которые являются решением уравнения ниже. Причем эти числа – минимальные из возможных. В ответе запишите эти три числа подряд без пробелов. (Например, если искомые числа 2, 4, 8, то ответ 248).

$$\cos\frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Для проверки корректности номера пластиковой карты, представляющего собой набор из 16 цифр $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16})$, вычисляются контрольные суммы A, B и C:

$$A = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16},$$

$$B = x_1 + x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 7x_9 + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{15}, \quad C = x_1 + x_2 + x_4 + 7x_5 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + x_{14} + x_{16}.$$

Если все три суммы A, B и C делятся нацело на 10, то номер признаётся корректным. Каких корректных номеров больше и насколько (укажите в ответе это число): у которых первые 4 цифры 0 0 0 0 или тех, у которых последние 4 цифры 0 0 0 0?

4. *Треугольником Паскаля* называют бесконечную треугольную таблицу чисел, у которой на вершине и по бокам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух стоящих над ним чисел. Так, например, третья строка треугольника (1,2,1) содержит два нечетных числа и одно четное. Сколько четных чисел содержится в строке с номером 1024?

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
…

5. Рассмотрим множество всех точек плоскости, координаты которых имеют вид $(m+2n, 3m-n)$, где m, n – целые числа. Докажите, что на прямой, проходящей через любые две точки указанного множества, лежит сторона некоторого квадрата, все четыре вершины которого принадлежат этому множеству. Укажите в ответе минимальную площадь такого квадрата.

6. Число городов в Криптоландии равно 4^4. В качестве названий города имеют различные цифровые комбинации вида *(a,b,c,d)*, где a,b,c и d – целые числа из множества {0,1,2,3}. Два города, названия которых отличаются одной цифрой, называются *соседними*. Например, города (3201) и (3001) соседние, а (1111) и (3311) – нет. У каждого города есть флаг определенного цвета, причем флаги соседних городов всегда имеют несовпадающие цвета. Власти объявили конкурс на создание системы флагов для городов, имеющей наименьшее возможное число различных цветов. Укажите в ответе это наименьшее число.

ОТВЕТЫ

9 КЛАСС

1. 0
2. 2
3. зову
4. криптография
5. 84

10 КЛАСС

1. 0
2. 2
3. наша
4. 9000000000
5. мореплавание
6. 0

11 КЛАСС

1. -19
2. 91525
3. 9000000000
4. 0
5. 98
6. 4